Φύλλο εργασίας

Θέμα: Επίλυση εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$.

1η ώρα

Οι τεχνικές επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων εμφανίζονται τουλάχιστον πριν 4000 χρόνια, στην αρχαία Μεσοποταμία, σημερινό Ιράκ. Οι μέθοδοι πιθανόν προήλθαν από τις τεχνικές των εποπτών, οι οποίοι ήταν υποχρεωμένοι να εργάζονται με τετράγωνα και ορθογώνια καθώς επόπτευαν εκτάσεις γης για οικοδομικούς σκοπούς. Οι τεχνικές στις οποίες κατέληγαν τελικά διατηρούνταν από τους γραφείς σε πήλινες πινακίδες, γραμμένες σε σφηνοειδή γραφή, εκατοντάδες από τις οποίες ανακαλύφθηκαν τον $20^{ο}$ αι. από τους αρχαιολόγους.

Οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και οι Έλληνες μαθηματικοί έλυναν διαφόρων τύπων δευτεροβάθμιες εξισώσεις, το ίδιο και οι Άραβες από τον $9^{ο}$ έως τον $12^{ο}$ αι. Αυτοί οι Άραβες ζούσαν σε μια αυτοκρατορία που εκτεινόταν από την Ισπανία και το Μαρόκο Δυτικά, έως το Πακιστάν Ανατολικά και η οποία είχε κοινή γλώσσα τα Αραβικά και κοινή θρησκεία το Ισλάμ.

Ο Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi**, από τους πρώτους Άραβες μαθηματικούς (περίπου 780-850 μ.Χ.), εργαζόταν στον Οίκο της Σοφίας στη Βαγδάτη (στο σημερινό Ιράκ). Ο Al-Khwarizmi έγραψε ένα βιβλίο για την άλγεβρα, στο οποίο εμφανίζονται οι λέξεις al-jabr (από όπου και η λέξη άλγεβρα) και al-muqabala. Το όνομα al-Khwarizmi έγινε η σημερινή λέξη αλγόριθμος. Στο βιβλίο του, μεταξύ άλλων λύνει και το ακόλουθο **πρόβλημα :**

Ποιο πρέπει να είναι το τετράγωνο το οποίο όταν αυξηθεί κατά δέκα από τις ρίζες του, ισοδυναμεί με 39; (με την λέξη τετράγωνο εννοεί αυτό που σήμερα λέμε x^2 και με την λέξη ρίζα εννοεί απλά το x)

Ο Al-Khwarizmi έδινε **οδηγίες** για την επίλυση με λόγια:

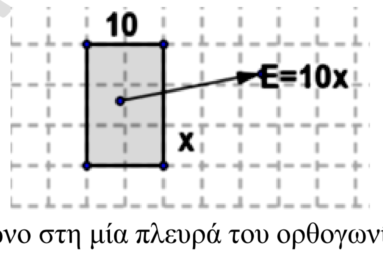
Ποιο πρέπει να είναι το τετράγωνο το οποίο αυξημένο κατά δέκα από τις ρίζες του ισοδυναμεί με 39; Η λύση είναι η εξής: Μοιράζεις στο μισό το πλήθος των ριζών, το οποίο για το παρόν παράδειγμα κάνει πέντε. Αυτό το πολλαπλασιάζεις με τον εαυτό του, το γινόμενο είναι 25. Πρόσθεσε το στο 39. Το άθροισμα είναι 64. Τώρα πάρε τη ρίζα αυτού, που είναι οκτώ και αφαίρεσε από αυτό το μισό πλήθος των ριζών που είναι πέντε. Το υπόλοιπο είναι τρία. Αυτή είναι η ρίζα του τετραγώνου που έψαχνες.

Δραστηριότητα 1η

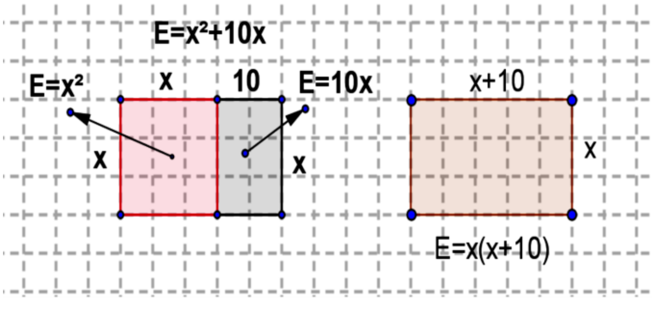
Α) Να διατυπώσουμε το πρόβλημα με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό.

Β) Ας δούμε τώρα τις οδηγίες που δίνει ο Al-Khwarizmi

Το πλάτος ενός ορθογωνίου είναι 10 μονάδες, το μήκος του είναι άγνωστο.



Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο στη μία πλευρά του ορθογωνίου με πλευρά το μήκος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

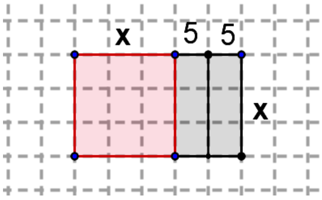


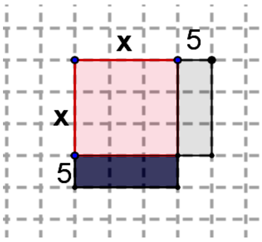
Τα δύο σχήματα μαζί έχουν εμβαδόν 39 μονάδες. Ποιο είναι το μήκος του ορθογωνίου;

Λύση

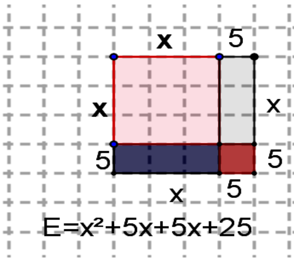
Ζητούμενο: Η γεωμετρική λύση της εξίσωσης $x^2+10x=39$

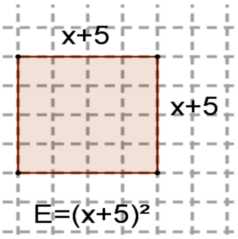
Χωρίζουμε στη μέση το ορθογώνιο με πλευρές 10 και *x* κατακόρυφα και μετά μετακινούμε το ένα μισό στη βάση του τετραγώνου.





Παρατηρούμε ότι αν “συμπληρώσουμε” στην κάτω δεξιά γωνία του σχήματος ένα τετράγωνο πλευράς 5, δηλαδή με εμβαδόν $5^2=25$, τότε δημιουργείτε ένα τετράγωνο με πλευρά x+5, δηλαδή με εμβαδόν $E=(x+5)^2$





Δηλαδή είχαμε ένα ορθογώνιο με εμβαδόν x^2+10x και θέλαμε $x^2+10x=39$. Άρα

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+10x+25=39+25$$
$$(x+5)^2=64$$

Οπότε $x+5=\pm 8 \Leftrightarrow (x=8-5=3)$ ή $(x=-8-5=-13)$

Βέβαια στη περίπτωση του σχήματος είναι $x=3$.

Να επαναλάβετε τη διαδικασία με ένα ορθογώνιο που έχει πλάτος 8 , άγνωστο μήκος, του οποίου το εμβαδόν μαζί με το τετράγωνο που σχηματίζεται με πλευρά το άγνωστο μήκος, είναι ίσο με 9.

Περιγράψτε ρητά τα βήματα της λύσης.

Δραστηριότητα 2η

Ας γενικεύσουμε το πρόβλημα χωρίς τη χρήση συγκεκριμένων αριθμών. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τύπο που να μας επιτρέπει να λύνουμε όλα τα αντίστοιχα προβλήματα. Γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε γράμματα για να αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς. Θα χρησιμοποιήσουμε το β για να αντιπροσωπεύσουμε το πλάτος, *γ* για το συνολικό εμβαδόν και ως συνήθως στην άλγεβρα, *x* για το άγνωστο μήκος.

Αρχικά πρέπει να μεταφράσουμε το πρόβλημα σε αλγεβρική εξίσωση και μετά να χρησιμοποιήσουμε τα βήματα της δραστηριότητας 1 για να βρούμε τον άγνωστο.

Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς x είναι………………….

Το εμβαδόν ορθογωνίου πλάτους β και μήκους x είναι ………………………….

Η εξίσωση που δηλώνει ότι το άθροισμα των δύο προηγούμενων εμβαδών ισούται με γ είναι ………………………………………………………

Επιλύστε το πρόβλημα όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις
Πρέπει να φτάσετε σε ένα αποτέλεσμα ισοδύναμο με το επόμενο:

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma} - \frac{\beta}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\gamma}}{2}$$

Δηλαδή αυτός ο τύπος δίνει τη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 + \beta x = \gamma \quad \textit{ή} \quad x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

2η ώρα

Δραστηριότητα 1η

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$.

α) Να την φέρετε στην μορφή $(x+\kappa)^2 = \lambda$ (Μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου)

……
……
……………………………………………………………………

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

……
……
……………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

α) Να την φέρετε στην μορφή $(x+\kappa)^2 = \lambda$.

……
……
……………………………………………………………………

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

……
……
……………………………………………………………………………

γ) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση με ομαδοποίηση και επιβεβαιώστε τις λύσεις του προηγούμενου τρόπου.

……
……
……………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 3η

Να λυθεί η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου.

Βήμα 1ο : Διαιρούμε όλους τους όρους με $\alpha \neq 0$]

………………………………………………………………………………………………

Βήμα 2ο : Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο δεύτερο μέλος

………………………………………………………………………………………………

Βήμα 3ο : Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τον συντελεστή του x (όχι του x^2) με 2 για να σχηματίσουμε το διπλάσιο γινόμενο(2αβ) της ταυτότητας.

………………………………………………………………………………………………

Βήμα 4ο : Συμπληρώνουμε και στα δύο μέλη της ταυτότητας το τετράγωνο που λείπει και σχηματίζουμε τη ταυτότητα.

……
……

Έχουμε καταλήξει στη μορφή: $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

Να ***διακρίνετε*** περιπτώσεις για το πρόσημο της ***Διακρίνουσας Δ*** και να λύσετε την εξίσωση.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 4η

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τα συμπεράσματά σας

Δ=	Λύσεις της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$
Δ> 0	
Δ=0	
Δ<0	

<u>Εφαρμογή</u>

α) Να φέρετε την εξίσωση $2x^2-2x+2=x^2+3x-2$ στην μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

β) Να ελέγξετε αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις.

………………………………………………………………………………………

γ) Στην περίπτωση που έχει να τις βρείτε.

……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

3η ώρα

Δραστηριότητα 1η

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^2 + 2x - 3$.

Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 2x - 3$, δηλαδή τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 3 = 0$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

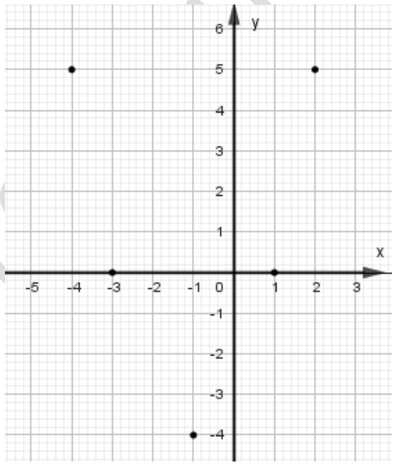
Ποια ζεύγη (x, y) σχηματίζονται με τις ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης;

……………………………………………………………………………………………………

Τι αντιπροσωπεύουν στο επίπεδο αυτά τα ζεύγη;

……………………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

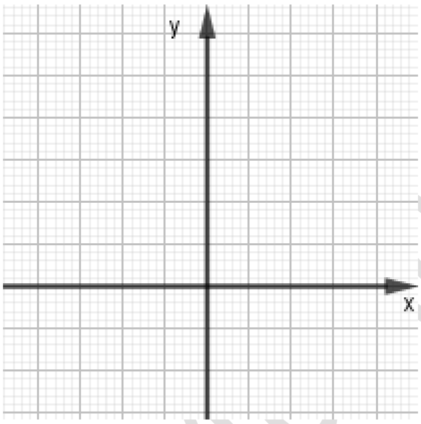


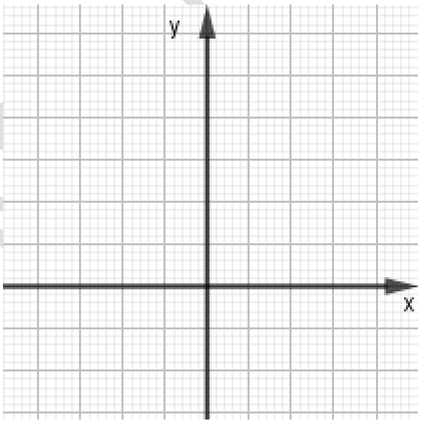
Σχεδιάζουμε στο geogebra την παραβολή $y = x^2 + 2x - 3$.
Μεταφέρετε στο διπλανό σύστημα αξόνων το σχήμα που βλέπετε.
Τι συμπεραίνετε για τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 3 = 0$;

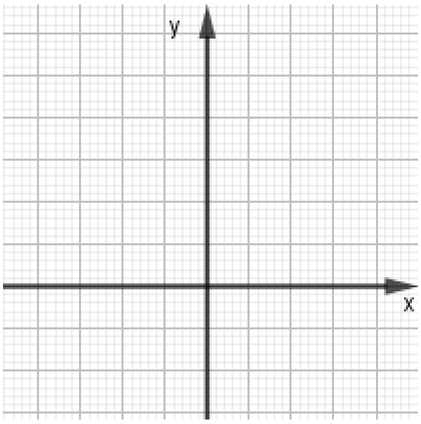
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Δραστηριότητα 3η

Πως μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με α > 0, για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ; Σε κάθε περίπτωση σημειώστε στο σχήμα τις ρίζες της εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$.







Σχεδιάζουμε στο geogebra, για του λόγου το αληθές 3 τέτοιες παραβολές.
Τις $y = x^2 + 4x + 3$, $y = x^2 + 4x + 4$ και $y = x^2 + 4x + 5$

Δραστηριότητα 4η

Ανοίγουμε αρχείο http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132 και πειραματιζόμαστε με τις λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

1. Δίνουμε στα α και γ ετερόσημες τιμές, τι παρατηρούμε;
2. Αν α >0 τότε
   i. Δώστε στο β αρνητικές τιμές και στο γ θετικές τιμές. Όταν η εξίσωση έχει δύο ρίζες τότε ποιο είναι το πρόσημό τους;
   ii. Βάλτε β=0
   - ποιο πρέπει να είναι το πρόσημο του γ για να υπάρχουν λύσεις;
   - τι παρατηρείτε για τις ρίζες της εξίσωσης όταν αυτές υπάρχουν;

   iii. Όταν γ=1 πολλαπλασιάστε για τις ρίζες της εξίσωσης (όταν υπάρχουν). Τι παρατηρείτε;